

易经哲学的数学原理

王新华

(深圳职业技术学院 工业训练中心, 广东 深圳 518055)

摘要: 用数学方法破解了千年古籍《易经》的秘密。在引入二进制数组并创建其右进位加法后, 利用代数定序和几何定位的方式给出了先天八卦和伏羲先天六十四八卦的建构原理; 引入元素置换, 用图论方法得到了文王后天八卦的建构原理。结合群论中的数学概念, 揭示了先天易的循环群特性, 不仅去除了《易经》神秘的玄学外衣, 也为易经哲学提供了科学的理论基础。

关键词: 易经; 八卦; 二进制数组; 右进位加法; 置换

中图分类号: B249; O15; O18 **文献标志码:** B **文章编号:** 1672-0318 (2017) 03-0051-05

《易经》是中国最老的古籍^[1-5]。它建立在阴阳二元论的基础之上, 以一套符号系统描述宇宙间万物的变易, 是中国传统思想文化中自然哲学与伦理实践的根源^[6]。

相传在上古时, 伏羲首先创造了先天易, 后来神农氏和轩辕氏又分别建立了连山易和归藏易。连山易和归藏易都已失传, 先天易因为周文王姬昌和孔夫子的传承而得以发扬光大^[7]。商朝末期, 周文王在被商纣王囚禁期间推演伏羲先天八卦的过程中创建了后天八卦^[8]。经过规范化、条理化之后, 八卦被进一步演绎出了六十四卦和三百八十四爻, 有了卦辞、爻辞, 人称《周易》^[9]。自伏羲首创先天易开始, 几千年来, 众多的先哲们都曾试图破解其中的秘密。据说十七世纪末微积分创始人莱布尼茨就曾用二进制数解释过《易经》^[10]。对《易经》的研究大致可分为义理和象数两派, 义理派着重于从卦名的涵义进行解释, 发掘《易经》的哲学价值; 而象数派则注重从八卦所象征的物象来解释, 侧重于将《易经》用于占卜^[11]。目前, 易学研究在原理探索上仍无重大进展, 理论研究停滞不前, 思想混乱, 实际应用也常趋向神秘主义^{[12]-[14]}。《易经》记录的是“上帝”的法则, 数学是“上帝”的语言。本文

采用数学方法揭秘《易经》的建构原理, 为易经哲学奠定科学的理论基础。

1 八卦的二进制数组表示

《易经系辞传》云: 易有太极, 始生两仪, 两仪生四象, 四象生八卦^[15]。

天地未开前的状态叫无极, 现代科学称之为混沌。天地初开即有阴阳, 《易经》中称为两仪, 并分别用符号“--”和“—”进行表示。而太极则是阴阳在混沌中的孕育状态, 因此, 太极图常将两条黑白的鱼形孕育于圆形之中(见图1), 其中的圆形指的是混沌状态的宇宙, 而黑白鱼形则隐喻阴阳。阴阳又有老阴、老阳、少阴、少阳之分, 此即为四象, 而八卦者, 即坤、艮、坎、巽、震、离、兑、乾。八卦是易学体系的基础, 有先天和后天之分, 并常与太极图搭配出现, 它代表了早期中国的哲学思想, 除占卜、风水之外, 其影响还涉及宗教、中医、武术、数学等方面^[16]。八卦的二进制表示最早开始于十七世纪, 由微积分创始人莱布尼兹给出^[10], 方法是将阳爻“—”取1、阴爻“--”取0。到目前为止, 八卦的二进制表示有数和立体坐标两种^[16], 例如, 艮卦(见表1)的二进制表示有: (1) 数: 001; (2) 立体坐标: $x=1$ 、 $y=0$ 、 $z=0$ 。

收稿日期: 2016-11-07

作者简介: 王新华(1962-), 男, 硕士, 副教授, 主要研究方向: 数论、函数逼近论。

然而，以往所有八卦的二进制探讨都仅止步于表示，未能进一步揭秘其原理。相应于八卦的二进制立体坐标表示，对于多重结构的八卦，例如伏羲先天六十四卦，可将其拓广为数组形式，为此，先建立二进制数组概念。

定义 1 设 n 为正整数， (x_1, \dots, x_n) 称为一个 n 维的二进制数组，当且仅当

$$x_k = 0 \text{ 或 } 1 \quad (k=1, \dots, n).$$

其中， x_k 称为 (x_1, \dots, x_n) 的第 k 分量或坐标。

由艮卦的二进制表示不难看出，相应于八卦各爻的从上到下次序，其二进制数编码是从右到左次序，而立体坐标编码则依三维坐标 (x, y, z) 次第是从左到右次序。类似于八卦的立体坐标编码，可建立八卦和伏羲先天六十四卦的二进制数组编码规则如下：

规则 1 相应于八卦或伏羲先天六十四卦各爻的从上到下次序，其二进制数组分量

- 1) 按从左至右次序依次编码；
- 2) 阳爻“—”取 1，阴爻“--”取 0。

类似于二进制数与十进制数的关系，可定义二进制数组与十进制数的关系。

定义 2 二进制数组 (x_1, \dots, x_n) (n 为正整数) 对应的十进制数为

$$x_1 + 2 \cdot x_2 + \dots + 2^{n-1} \cdot x_n.$$

由规则 1，结合八卦的自然、五行物象，可建立八卦的综合信息表见表 1。

不难看出，相应于八卦符号中各爻的从上到下次序，其二进制数组分量从左至右依次编码，比二进制数从右至左依次编码更加符合自然习惯。

表 1 八卦综合信息表

名称	符号	二进制数组表示	二进制数表示	自然属性	五行属性
坤	☷	$a_0=(0, 0, 0)$	000	地	土
艮	☶	$a_1=(1, 0, 0)$	001	山	土
坎	☵	$a_2=(0, 1, 0)$	010	水	水
巽	☴	$a_3=(1, 1, 0)$	011	风	木
震	☳	$a_4=(0, 0, 1)$	100	雷	木
离	☲	$a_5=(1, 0, 1)$	101	火	火
兑	☱	$a_6=(0, 1, 1)$	110	泽	金
乾	☰	$a_7=(1, 1, 1)$	111	天	金

综合表 1 和定义 2，不难验证： a_k 对应的十进制数为 k ($k=0, 1, \dots, 7$)。

2 二进制数组的右进位加法

在数论中，若正整数 m 除以正整数 k 的商是 d 、余数是 c ，则有同余式^[17]：

$$m \equiv c \pmod{k},$$

扩充这一表示，引入完整的同余记号：

$$m \equiv (c, d) \pmod{k},$$

并创建二进制数组的右进位加法“ \oplus ”如下：

定义 3 设 n 是正整数， $X=(x_1, \dots, x_n)$ 和 $Y=(y_1, \dots, y_n)$ 都是 n 维二进制数组，若

$$d_0 = 0, \quad x_k + y_k + d_{k-1} \equiv (c_k, d_k) \pmod{2} \quad (k=1, \dots, n),$$

其中“+”为十进制加法运算符，则定义 $X \oplus Y = (c_1, \dots, c_n)$ 。

由定义 3 不难看出，二进制数组的右进位加法的结果由余数构成，商 d_k 同时也是第 k 分量位置上的运算的进数，并在第 $k+1$ 分量位置参与运算。于是定义 3 可简化为如下规则：

规则 2 二进制数组的右进位加法遵循规则：

- 1) 余数留在本位，进数进入下一分量位置参与运算；
- 2) 最后分量位置只保留余数，不再考虑进数。

规则 2 规避了定义 3 中的同余计算，并使其计算与二进制数的加法相类似。例如，由规则 2 可方便地得到：

$$(1, 1, 0) \oplus (1, 1, 1) = (0, 1, 0),$$

其对应的二进制数运算是：

$$011 + 111 = 1010.$$

不难看出，运算起点前者在左、后者在右，而进位方向则刚好相反：前者向右、后者向左。

如果视 011 和 111 为 3 维度的二进制数，那么它们相加的结果 1010 却是一个 4 维度的二进制数。定义 3 和规则 2 有效阻止了这种空间溢出，其右进位则是顺应规则 1 的自然编码次序而设置。

3 先天易的数学原理

先天易以先天八卦和伏羲先天六十四卦为基础。

由规则 2 依次将(0,0,0)、(1,0,0)、…、(1,1,1)与(1,0,0)作右进位加法运算,得:

$a_0 \oplus a_1 = a_1$ (坤+艮=艮); $a_1 \oplus a_1 = a_2$ (艮+艮=坎);

$a_2 \oplus a_1 = a_3$ (坎+艮=巽); $a_3 \oplus a_1 = a_4$ (巽+艮=震);

$a_4 \oplus a_1 = a_5$ (震+艮=离); $a_5 \oplus a_1 = a_6$ (离+艮=兑);

$a_6 \oplus a_1 = a_7$ (兑+艮=乾); $a_7 \oplus a_1 = a_0$ (乾+艮=坤)。

于是有先天八卦的建卦原理:

原理 1 先天八卦出于“坤”(a_0), 生于“艮”(a_1), 卦序满足:

$$a_{k+1} = a_k \oplus a_1 \quad (k=0, \dots, 6).$$

方位按如下规则确定:

1) 天地定位^[18]: 依据天上、地下的自然特性定位上乾(a_7)、下坤(a_0);

2) 八卦相生: 由“坤+艮”生“艮”、“艮+艮”生“坎”、…、“兑+艮”生“乾”, 依卦序分别将艮(a_1)、坎(a_2)、巽(a_3)按逆时针方向及震(a_4)、离(a_5)、兑(a_6)按顺时针方向均匀地分布于右和左半圆周(如图 1 所示)。

考虑上下两层先天八卦所构成的重卦, 由规则 1 知“坤为地”卦(即坤上坤下)的二进制数组表示为:

$$b_0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

令 $b_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$, 类似地可得伏羲先天六十四卦的建卦原理。

原理 2 伏羲先天六十四卦出于“坤”(b_0), 生于“剥”(b_1), 卦序满足:

$$b_{k+1} = b_k \oplus b_1 \quad (k=0, \dots, 62).$$

方位按如下规则确定:

1) 天地定位^[18]: 将“乾为天”卦(b_{63})和“坤为地”卦(b_0)分别定位在圆周的的正上和正下方;

2) 八卦相生: 由各卦加“剥”卦(b_1)生后卦之卦序分别依次将 b_1, \dots, b_{31} 按逆时针方向和 b_{32}, \dots, b_{62} 按顺时针方向均匀地分布于右和左半圆周(如图 2 所示)。

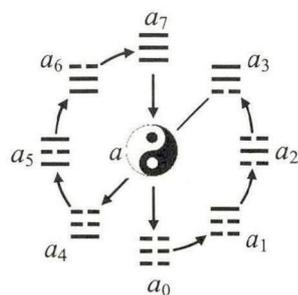


图 1 先天八卦方位

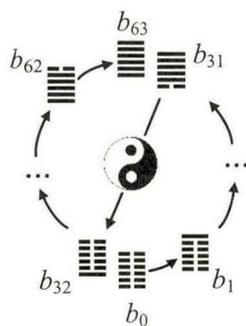


图 2 先天六十四卦方位图

4 后天八卦的数学原理

几千年来,人们只知道后天八卦是周文王在被商纣王囚禁时推演伏羲先天八卦而创建,但却不知道他为什么要那样作卦,更不知道那个后天八卦图(图 3)是如何作出来的。

有人试图利用河图或洛书,并附加一些数字规律进行解释,然而,所有的解释除了玄秘,都未曾真正揭示后天八卦的本质. 本文用宫元(即九宫中的元素)换^[19]方法来破解这一秘密。

原理 3 视图 1 中的中央太极图位置为第九宫,用变量 a 表示其中的太极图,并以先天次序 $[a_0, a_1, \dots, a_6, a_7, a]$ 为九宫元素的初始次序进行置换。

1) 进 3 宫: 图 1 中各卦与太极图沿图 1 箭头路线向前进 3 宫得图 4, 即九宫元素次序为:

$$[a_6, a_7, a, a_0, a_1, \dots, a_4, a_5];$$

2) 换位: 将图 4 中的 a_5 (离)与 a (太极图)换位得图 5, 即九宫元素次序为:

$$[a_6, a_7, a_5, a_0, a_1, \dots, a_4, a];$$

3) 旋转: 将图 5 中的 a_3 (巽)、 a_0 (坤)、 a_7 (乾)、 a_1 (艮)固定在原位, 让 a_4 (震)、 a_2 (坎)、 a_6 (兑)、 a_5 (离)逆时针旋转 90° , 即得后天八卦(图 3)。

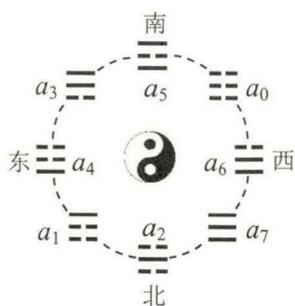


图3 后天八卦方位图

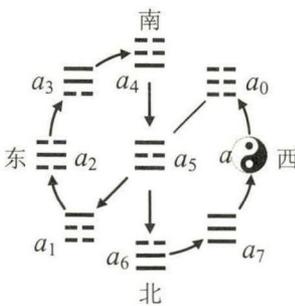


图4 先天八卦进3宫图

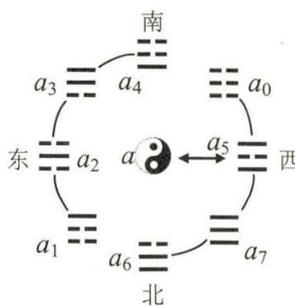


图5 离与太极换位图

5 八卦的循环群特性

为了说明先天易的循环群特性,先引入下面定义:

定义4 设 m 、 n 为正整数,定义

$$m a_1 = a_1 \oplus \dots \oplus a_1 \quad (m \text{ 个 } a_1 \text{ 相加}),$$

$$n b_1 = b_1 \oplus \dots \oplus b_1 \quad (n \text{ 个 } b_1 \text{ 相加}).$$

注意先天八卦或伏羲先天六十四卦对应的二进制数组对其右进位加法是封闭的.此外,不难验证:

$$a_m = m a_1 \quad (m=1, \dots, 7), \quad b_n = n b_1 \quad (n=1, \dots, 63),$$

从而加法交换律和结合律成立.再注意到 a_0 和 b_0 分别是先天八卦和伏羲先天六十四卦的零元,且

$$[a_1, a_2, \dots, a_7] \oplus [a_7, a_6, \dots, a_1] = [a_0, a_0, \dots, a_0],$$

$$[b_1, b_2, \dots, b_{63}] \oplus [b_{63}, b_{62}, \dots, b_1] = [b_0, b_0, \dots, b_0],$$

即 a_1 至 a_7 的负元依次为 a_7 至 a_1 ; b_1 至 b_{63} 的负元

依次 b_{63} 至 b_1 , 于是有:

定理1 先天八卦和伏羲先天六十四卦对应的二进制数组,对其右进位加法构成 Abel 群及阶数分别是 8 和 64 阶的循环群.

6 结论和讨论

《易经》曾被广泛应用于天文、地理、军事、建设、生活等许多领域,也被公认为是人类智慧的最伟大结晶,然而,几千年来,一直都未能真正破译出它的科学原理,相反,因为其神秘的玄学外衣,常容易被误认为是巫书或迷信.

大道无形,至简至易.文中在创建了二进制数组的右进位加法之后,用代数定序和几何定位的方式给出了先天八卦和伏羲先天六十四卦的建卦原理,同时也以宫元置换的几何方式揭示了后天八卦的建卦原理,从而完整地破解了《易经》密码.二进制数组及其右进位加法优于二进制数及其左进位加法,不仅在于自然习惯,最主要的是运算的封闭性,这也是八卦和伏羲先天六十四卦分别构成 8 阶和 64 阶循环群的根本原因所在.由原理 1 知,先天八卦出于坤、生于艮.换言之,艮卦所在的西北位置即为八卦的生门所在.

几千年来,周天养生法是中国传统医学、道教、武术、气功各派仅限于师徒传承的秘密,因而常披以神秘的外衣,也很容易被误认为是迷信,应用后天八卦返还先天八卦的步骤即可对周天养生法做出科学揭秘.易见,先天易的构建和代数运算相关联,后天八卦的构建则与图形相关联.这与微积分建立在两个重要的极限之上,与 e 和 π 相关联,并分别利用代数运算和几何图形进行证明,可谓异曲同工^[20].本文用数学的思想方法,探寻了华夏瑰宝——易学坚实的理论基础,破除迷信,还原易经的本来面目.

参考文献:

- [1] 李鼎祚.周易集解[M].北京:中华书局,2013:7.
- [2] 王弼,孔颖达.周易正义[M].北京:中国致公出版社,2009:1.
- [3] 朱熹.周易本义[M].南京:凤凰出版社,2011:1.
- [4] 张政烺.马王堆帛书周易经传校读[M].北京:中华书

- 局, 2008: 4.
- [5] 黄寿祺, 张善文. 周易译注[M]. 上海: 上海古籍出版社, 2013: 7.
- [6] 新浪博客. 易经是什么[EB/OL]. (2014-09-19). http://blog.sina.com.cn/s/blog_b59d37480102vliq.html.
- [7] Baidu 文库. 文王[EB/OL]. (2012-07-28). <http://wenku.baidu.com/view/ecb799c19ec3d5bbfd0a74bc.html?from=search>.
- [8] Baidu 文库. 姜里城与周文王[EB/OL]. (2015-04-03). <http://wenku.baidu.com/view/25565b80770bf78a652954e8.html?from=search>.
- [9] 徐志锐. 周易大传新注[M]. 济南: 齐鲁书社, 1986: 6.
- [10] 胡阳, 李长铎. 莱布尼茨二进制与伏羲八卦图考[M]. 上海: 上海人民出版社, 2006: 8.
- [11] 朱伯昆. 易学哲学史[M]. 北京: 昆仑出版社, 2009: 9.
- [12] 杨庆中. 现代易学研究的困境与出路[J]. 学术月刊, 2008 (1): 46-51.
- [13] 刘震. 近年来易学研究述评[J]. 哲学动态, 2012 (7): 88-93.
- [14] 谢祥荣. 易经研究的几个首要问题[EB/OL]. (2015-11-08). <http://mooc.chaoxing.com/course/166867.html>.
- [15] 刘君祖. 详解易经系辞传[M]. 北京: 新星出版社, 2011.
- [16] 互动百科. 八卦[EB/OL]. (2016-05-13). <http://www.baik.com/wiki/%E5%85%AB%E5%8D%A6>.
- [17] [俄]维诺格拉多夫. 数论基础[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2011: 3.
- [18] 新浪博客. 易经说卦传[EB/OL]. (2011-06-16). http://blog.sina.com.cn/s/blog_6b7230b40100u5w4.html.
- [19] Joseph J Rotman. 高等近世代数[M]. 北京: 机械工业出版社, 2007: 1.
- [20] Kline M. 古今数学思想[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 2009: 10.

The Mathematical Principles of *I Ching* Philosophy

WANG Xinhua

(Industrial Training Centre, Shenzhen Polytechnic, Shenzhen, Guangdong 518055, China)

Abstract: In this paper, mysteries of an ancient book *I Ching* are solved by using mathematical method. Based on algebraic sequencing with the right carry addition of binary array and geometric positioning, the author gives the construction principles of the innate Eight Diagrams and Fuxi's innate sixty-four diagrams. With the mathematical concept of group theory, this paper reveals the cyclic group properties of the innate Yi. It not only removes the mysterious guise of *I Ching* as metaphysics, but also establishes the scientific theory for *I Ching* philosophy.

Key words: *I Ching*; Eight Diagrams; binary array; right-carry addition; substitution